力学系の古典軌道と量子エネルギー分布 (力学系と微分幾何学)

桑原, 類史

数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 26-34

力学系の古典軌道と量子エネルギー分布

徳島大学総合科学部　　桑原 類史 (KUWABARA, Ruishi)

はじめに

古典力学系における軌道の性質と，対応する量子力学系（シュレディンガー方程式）のエネルギー分布との関係は，種々の視点から議論されてきている．

その出発点は，**Bohr-Sommerfeld の量子化則**である．すなわち，軌道が周期的である古典力学系における断熱不変量についての条件：

$$J_s \ (\equiv \oint_{\gamma_s} \sum p_j dq_j) \ = N_s h \quad (N_s \in \mathbb{Z},\ h : \text{Planck 定数})$$

をみたす軌道におけるエネルギーが量子系でのエネルギーを与えるというものである．Bohr-Sommerfeld の量子化則は，その後，Keller, Maslov [3] 等によって精密化されたが，実際にそれが適用できるのは力学系が完全積分可能なときである．一方，シュレディンガーの波動力学によれば，古典ハミルトン関数からある規則で，自己共役微分作用素が対応し，その固有値として量子エネルギー分布が得られる．

ところで，Bohr-Sommerfeld-Maslov の量子化則から得られるエネルギー準位とシュレディンガー固有値方程式を解いて得られる準位とは，一般には，一致しない．(シュレディンガー作用素をどの様に対応させるか（特に，配位空間が曲がっているとき）にも依るが.)

これらの２つのエネルギー準位の関係を，測地流の力学系の場合に，フーリエ積分作用素の理論に基づいて明らかにしたのが，Weinstein [5] である：(M, g) をコンパクトリーマン多様体とすると，余接バンドル上に測地流の力学系 (T^*M, Ω_M, H) が定義される．このとき，

定理 a (Weinstein)．L を (T^*M, Ω_M) のコンパクトラグランジュ部分多様体，$E(>0)$ を 以下を満たす定数とする：
(i) L 上で，$H \equiv E$.
(ii) T^*M 上の測地流 φ_t が L を不変にし，かつ $\varphi_t|_L$ で不変な L 上の（零でない）半密度 (half density) が存在する．
(iii) （量子化条件）L 上の任意の閉曲線 γ に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \omega_M - \frac{1}{4} m_L(\gamma) \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

ただし，$\omega_M = \sum_k \xi_k dx^k$，$m_L$ は L のマスロフ類 $(\in H^1(L, \mathbb{Z}))$ である．
このとき，Δ の固有値の列 $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して次を満たす：

$$|\sqrt{\lambda_k} - (dk+1)\sqrt{E}| < R/(dk+1) \qquad (R:\ \text{ある定数}). \tag{0.2}$$

ここで，d は 1,2,4 のうち，$dm_L(\gamma) \equiv 0 \pmod 4$ for $\forall \gamma$ を満たす最小の値である．

この定理を半古典近似の視点からみる．(0.2) より，

$$\left|\frac{\lambda_k}{(dk+1)^2}-E\right|<\frac{R'}{(dk+1)^2}.$$

一方，

$$\frac{1}{(dk+1)^2}\Delta\varphi_k=\frac{\lambda_k}{(dk+1)^2}\,\varphi_k$$

より，$\hbar:=1/(dk+1)$ と考えれば，量子化条件を満たす E は Schrödinger の固有値方程式

$$\hbar^2\Delta\psi=\mu\psi$$

から求まる量子エネルギー μ の $\hbar^2$ のオーダーの近似値を与える，と解釈できる．

上の定理 a の拡張を考える．定理 a で扱った測地流の系は，(M,g) 上の自由粒子の運動をあらわす．これを拡張して，(M,g) 上に磁場 Θ（M 上の閉実２次形式）が与えられたとき，その中における（単位電荷をもつ）荷電粒子の運動をあらわす力学系を考える．これは，シンプレクティック構造が

$$\Omega:=\Omega_M+\pi_M^*\Theta$$

$(\pi_M:T^*M\to M)$ で与えられるハミルトン系 (T^*M,Ω,H) として定式化される．ただし，Ω_M は T^*M の標準的なシンプレクティック形式であり，H は計量 g から自然に定まるハミルトニアンである．一方，対応する量子系（シュレディンガー作用素）を考えるためには，磁場 Θ に条件

$$(*)\qquad [\Theta/2\pi]\in H^2(M,\mathbb{Z})\ (\subset H^2(M,\mathbb{R}))$$

を課す．このとき，Chern-Weil の理論により，Chern 類が $[\Theta/2\pi]$ となる M 上の複素直線束 $\pi_E:E\to M$ が一意的に存在し，更に，E 上には, 曲率が $i\Theta$ $(i:=\sqrt{-1})$ であるような接続 $\tilde{\nabla}$ および $\tilde{\nabla}$-不変なエルミート構造が入る．さて，計量 g と接続 $\tilde{\nabla}$ から，E 上に非負，自己共役，楕円型２階微分作用素（Bochner-Laplacian と呼ばれる）$\hat{H}$ が自然に定義される．局所的に，$\Theta=d(\sum_j A_j dx^j)$ とすれば,

$$\hat{H}=-\sum_{j,k}g^{jk}(\nabla_j-iA_j)(\nabla_k-iA_k)$$

と表される．ただし，∇ は (M,g) の共変微分である．更に，$m\in\mathbb{Z}$ に対して，Chern 類が $[m\Theta/2\pi]$ であるエルミート直線束 $\pi_E^m:E^m\to M$ 上の Bochner-Laplacian

$$\hat{H}_m=-\sum_{j,k}g^{jk}(\nabla_j-imA_j)(\nabla_k-imA_k)$$

を考える．$\hat{H}$（および $\hat{H}_m$）を (T^*M,Ω,H) に対応する Schrödinger 作用素と考えることにする．

本稿では，$\hat{H}_m$ のスペクトル（固有値から成る）

$$(0\le)\ \lambda_1^{(m)}\le\lambda_2^{(m)}\le\cdots\le\lambda_j^{(m)}\le\cdots\uparrow+\infty$$

と古典系 (T^*M,Ω,H) について，定理 a に対応するものがどの様に定式化されるか論じる．

1．磁場における力学系の量子化条件

まず，磁場における力学系について，別の見方（簡約化による定式化）をしておく．

$\pi : P \to M$ をエルミート直線束 $\pi_E : E \to M$ に同伴する主 $U(1)$ バンドルとする．P 上には，E 上の接続 $\tilde{\nabla}$ に対応する接続が誘導される．(これも同じ記号 $\tilde{\nabla}$ であらわす.) 具体的に，$U(1) = \{e^{it}; 0 \le t < 2\pi\}$ とし，(x,t) $(x \in U \subset M,\ t \in [0, 2\pi))$ を P の局所座標とするとき，P 上の接続 $\tilde{\nabla}$ の接続形式（P 上の $\mathfrak{u}(1)$-値２次形式）は $\hat{\theta} = (dt + \sum_j A_j dx^j) \otimes \partial/\partial t$，曲率形式は $\hat{\Theta} = d\hat{\theta} = \Theta \otimes \partial/\partial t$ で与えられる．M の計量 g，接続 $\tilde{\nabla}$ および，構造群 $U(1)$ の不変計量から，**Kaluza-Klein 計量**と呼ばれる P 上のリーマン計量 $\tilde{g}$ が定義される．このとき，$U(1)$ の作用は計量 $\tilde{g}$ に関して等長的である．$\tilde{g}$ から定まる P 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ_P および１次擬微分作用素 $\sqrt{\Delta_P}$ を考える．$\widetilde{H}$ を Δ_P の主シンボル（$T^*P\backslash 0$ 上の関数）とする．

$\widetilde{H}$ をハミルトニアンとする T^*P 上の力学系は，測地流の系で，その流れは $U(1)$ の（シンプレクティック）作用と可換である．この $U(1)$-対称性から Marsden-Weinstein の Reduction program によって，下図のように，各 $\mu \in \mathfrak{u}(1)^* \cong \mathbb{R}$ に対して，**簡約力学系** $(P_\mu, \Omega_\mu, \widetilde{H}_\mu) \cong (T^*M, \Omega_\mu^M, H_\mu)$ が得られる．ちなみに，$J : T^*P \to \mathfrak{u}(1)^*$ は $U(1)$ のシンプレクティック作用から定まる運動量写像である．また，微分同相写像 $\Psi_\mu : P_\mu \to T^*M$ は P の接続 $\tilde{\nabla}$ から自然に定義され，関係：

$$\Omega_\mu = \Psi_\mu^* \Omega_\mu^M = \Psi_\mu^*(\Omega_M + \mu \pi_M^* \Theta), \quad \widetilde{H}_\mu = \Psi_\mu^* H_\mu = \Psi_\mu H + |\mu|^2$$

を与える．$\mathfrak{u}(1)$ の基底 $\partial/\partial t$ に対して，$\langle \mu_0, \partial/\partial t \rangle = 1$ によって定まる $\mu_0 \in \mathfrak{u}(1)^*$ を考え，対する力学系 $(T^*M, \Omega_{\mu_0}^M, H_{\mu_0})$ を考えると，これが，正に，前節で導入された磁場における力学系 (T^*M, Ω, H) に一致する．(ハミルトニアン H_{μ_0} と H は定数だけの違いがある.)

$$\begin{tikzcd}
 & T^*P \arrow[dl, "\pi_P"'] \arrow[r, "J"] & \mathfrak{u}(1)^* \\
P \arrow[ddd, "\pi"] & J^{-1}(\mu) \arrow[u, "i_\mu"'] \arrow[d, "\pi_\mu"] & \\
 & P_\mu(= J^{-1}(\mu)/S^1) \arrow[d, "\Psi_\mu", "\cong"'] & \\
 & T^*M \arrow[dl, phantom] & \\
M & &
\end{tikzcd}$$

量子力学系：群 $U(1)$ の P への作用に対応する微分作用素 $D_t = -i\partial/\partial t$ を考える．自己共役作用素 D_t のスペクトルは $\mathbb{Z}$ で，固有空間分解

$$L^2(P) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_m$$

が得られる．ここで，$\mathcal{H}_m$ は $f(p \cdot e^{it}) = e^{imt} f(p)$ をみたす関数からなる空間である．$U(1)$ の作用が等長的であるから，Δ_P と D_t は可換である．よって，Δ_P は $\mathcal{H}_m$ を不変にする．そこで，$D_m := \Delta_P|_{\mathcal{H}_m}$ とおく．$U(1)$ の表現 $e^{it} \mapsto e^{-imt}$ による P の同伴直線束が $\pi_E^m : E_m \to M$ に他ならない．そして，同形対応 $\mathcal{H}_m \cong L^2(E^m)$ が成り立つ．この対応で作用素 D_m は $C^\infty(E_m)$ に作用する作用素

$$\hat{H}_m + m^2 C^2 \quad (C := |\partial/\partial t|^{-1})$$

に対応する．従って，D_m の固有値は $\{\lambda_j^{(m)}+m^2C^2\}_{j=1}^{\infty}$ であり，Δ_P のスペクトルは，

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\lambda_j^{(m)}+m^2C^2\}$$

である．

Maslov(-吉岡）の量子化条件：L を $(T^*M,\Omega)\ (=(T^*M,\Omega_{\mu_0}^M))$ の Lagrange 部分多様体とする．上の図式における記号を使って，

$$L_P := (\Psi_{\mu_0}\pi_{\mu_0})^{-1}(L)\subset J^{-1}(\mu_0)\subset T^*P$$

とおく．

補題 1.1. L_P は (T^*P,Ω_P) の Lagrange 部分多様体である．

T^*P の標準的シンプレクティック形式 Ω_P は T^*P 上の canonical 1-form ω_P によって，$\Omega_P=d\omega_P$ とかける．また，Lagrange 部分多様体 L_P に対して，Maslov class と呼ばれる $m_{L_P}\in H^1(L_P,\mathbb{Z})$ が定義される．

そこで，Lagarange 部分多様体 $L\subset(T^*M,\Omega)$ について，次の条件を考える：

(Q)　　L_P上の任意の閉曲線 γ に対して，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma \omega_P-\frac{1}{4}m_{L_P}(\gamma)\in\mathbb{Z}.$

これを **Maslov(-吉岡) の量子化条件** [6] と呼ぶ．

注意． 磁場 Θ が完全形式 $\Theta=d\theta$ であるとき，T^*M 上の 1 次微分形式 $\omega:=\omega_M+\pi_M^*\theta$ によって，$\Omega=d\omega$ と表せる．このとき，L に対する量子化条件 (Q) は

(Q_M)　　L 上の任意の閉曲線 γ に対して，$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma \omega-\frac{1}{4}m_L(\gamma)\in\mathbb{Z}.$

に同値である．

2．スペクトルと量子化条件（主定理）

問題は，**磁場における古典力学系** (T^*M,Ω,H) **の量子化条件と量子エネルギー** $\{\lambda_j^{(m)}\}$ **の分布との関係は如何？**ということである．定理 a（Weinstein の結果）を拡張して，次の結果が得られる（文献 [2] 参照）．

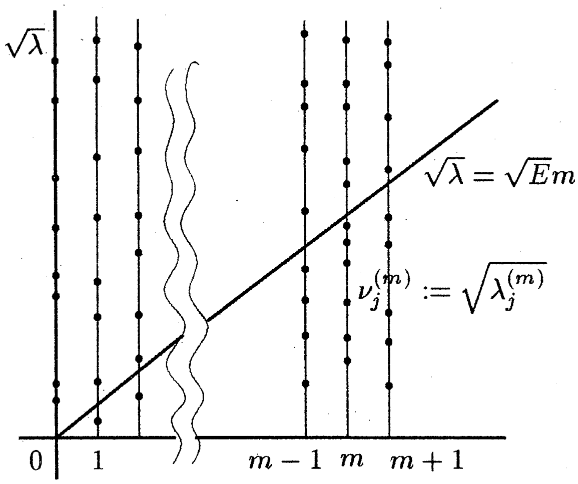
主定理. L を (T^*M,Ω) のコンパクト Lagrange 部分多様体，E を正定数とし，以下が満たされるとする：
(i) L 上で，$H \equiv E$.
(ii) T^*M 上の magnetic flow φ_t が L を不変にし，かつ $\varphi_t|_L$ で不変な L 上の non-zero 1/2-density が存在する.
(iii) L は Maslov(-吉岡) の量子化条件 (Q) を満たす.
このとき，$\hat{H}_{dk+1}(k=0,1,2,\dots)$ の固有値の列 $\{\lambda_{j_k}^{(dk+1)}\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して次を満たす：

$$|\lambda_{j_k}^{(dk+1)} - (dk+1)^2E| < R \qquad (R:\ \text{ある定数}), \tag{2.1}$$

i.e.,

$$\left|\sqrt{\lambda_{j_k}^{(dk+1)}} - (dk+1)\sqrt{E}\right| < R'/(dk+1) \qquad (R':\ \text{ある定数}). \tag{2.1'}$$

ここで，d は 1,2,4 のうち，$dm_{L_P}(\gamma) \equiv 0 \pmod 4$ for $\forall\gamma$ を満たす最小の値である.



作用素 $\hat{H}_m$ に対応して，

$$\hat{H}_q = -\sum_{j,k} g^{jk}\left(\frac{1}{m}\nabla_j - iA_j\right)\left(\frac{1}{m}\nabla_k - iA_k\right)$$

を考える．$1/m = \hbar$ と考えると，$\hat{H}_q$ が量子力学の本来のシュレディンガー作用素といえる．固有値問題

$$\hat{H}_q\psi = E\psi$$

は，作用素 $\hat{H}_m$ に関して

$$\hat{H}_m\phi = Em^2\phi$$

に対応することに注意する．そこで，$m_k = dk+1 = 1/\hbar$ とおくと，$\lambda(\hbar) := \lambda_{j_k}^{(m_k)}/m_k^2$ は $\hat{H}_q$ の固有値と考えられ，(2.1) 式は

$$|\lambda(\hbar) - E| < Rm_k^{-2} = R\hbar^2$$

を意味する．従って，定理の意味は，拡大解釈すれば，次のようなことになる：**『E が半古典エネルギー（すなわち，量子化条件を満たす Lagrange 部分多様体があって，その上で $H \equiv E$ となる）であれば，E は対応する量子力学エネルギーの（$\hbar^2$ のオーダーの）近似値を与える.』**

註. 力学系 (T^*M, Ω, H) が完全積分可能とすると，このとき，可換な n 個の第一積分 $f_1 = H, f_2, \ldots, f_n$ に対して，

$$L_c := \{p \in T^*M; f_i(p) = c_i \ (0 \le i \le n)\}$$

は Lagrange 部分多様体で，主定理の条件 (i),(ii) は自動的に満たされる．

3．主定理の証明の筋道

主定理の証明の要点は以下の通りである．2 次元トーラス

$$\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1 = \{(e^{it}, e^{is}); 0 \le t, s < 2\pi\}$$

上の 2 乗可積分関数 $f(t,s)$ は

$$f(t,s) = \sum_{\ell, m \in \mathbb{Z}} f_{\ell,m} e^{i\ell t} e^{ims} \tag{3.1}$$

と表される．$m_k = dk + 1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$ とおくとき，(3.1) において，$(\ell, m) \neq (m_k, m_k)$ に対して，$f_{\ell,m} = 0$ となるような $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ の全体を $L^2(\mathbb{T}^2; \{m_k\})$ と書く．いま，連続線形作用素 $A : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{D}'(P)$ で以下を満たすものを考える：

(A-i) $E_c^{-1} \Delta_P A - A D_{\mathbb{T}^2}$ が $L^2(\mathbb{T}^2)$ から $L^2(P)$ への有界作用素を誘導する．

ここで，$E_c := E + C^2$, $D_{\mathbb{T}^2} := (-1/4)(\partial/\partial t + \partial/\partial s)^2$.

(A-ii) $A : L^2(\mathbb{T}^2; \{m_k\}) \to L^2(P)$ は等長的.

(A-iii) $A(e^{im_k(t+s)}) \in \mathcal{H}_{m_k}$.

このような A が存在したとする．$w_k := A(e^{im_k(t+s)}) \in \mathcal{H}_{m_k}$ とすると，

$$\begin{aligned}
\|(E_c^{-1}\Delta_P - m_k^2) w_k\|_{L^2(P)} &= \|(E_c^{-1}\Delta_P A - A D_{\mathbb{T}^2}) e^{im_k(t+s)}\|_{L^2(P)} \\
&\le M \|e^{im_k(t+s)}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} = M.
\end{aligned}$$

一方，$\mathcal{H}_{m_k} \ni w_k = \sum_j \hat{w}_{k,j} \varphi_j^{(m_k)}$ （$\{\varphi_j^{(m_k)}\}_{j=1}^{\infty}$ は D_{m_k} の固有関数の正規直交基底）と書けるから，$\nu_j^{(m_k)} := \lambda_j^{(m_k)} + m_k^2 C^2$ として，

$$\begin{aligned}
&\|(E_c^{-1}\Delta_P - m_k^2) w_k\|_{L^2(P)}^2 \\
&\quad = \|E_c^{-1} \sum_j \hat{w}_{k,j} \nu_j^{(m_k)} \varphi_j^{(m_k)} - \sum_j m_k^2 \hat{w}_{k,j} \varphi_j^{(m_k)}\|_{L^2(P)}^2 \\
&\quad = \frac{1}{E_c^2} \sum_j \{\nu_j^{(m_k)} - E_c m_k^2\}^2 |\hat{w}_{k,j}|^2 \\
&\quad \ge \frac{1}{E_c^2} \inf_j \{\nu_j^{(m_k)} - E_c m_k^2\}^2 \sum_j |\hat{w}_{k,j}|^2 \\
&\quad = \frac{1}{E_c^2} \inf_j \{\nu_j^{(m_k)} - E_c m_k^2\}^2 = \frac{1}{E_c^2} \inf_j \{\lambda_j^{(m_k)} - E m_k^2\}^2.
\end{aligned}$$

ここで，条件 (ii) より，$\sum_j |\hat{w}_{k,j}|^2 = 1$ に注意，上の不等式と合わせて，

$$\inf_j \{\lambda_j^{(m_k)} - Em_k^2\}^2 \leq E_c^2 M$$

すなわち，

$$\inf_j |\lambda_j^{(m_k)} - Em_k^2| \leq R.$$

このようにして，上の条件 (1) − (iii) を満たす作用素 A を構成できれば主定理が証明されたことになる．この様な A は，量子化条件をみたす Lagrange 部分多様体 L (L_P) から定義される canonical relation $\Lambda \subset (T^*P\backslash 0) \times (T^*\mathbb{T}^2\backslash 0)$ によって定まる Fourier 積分作用素として与えられる．その手法は [5]（または [4, Ch.XII, §4]）の自然な拡張である．

A の構成． $m_{L_P} \in H^1(L_P, \mathbb{Z})$ を mod 4 で考えて，$m_{L_P} : \pi_1(L_P) \to \mathbb{Z}_4$ で定まる連結 (d 重) 被覆空間

$$p : \overline{L}_P \to L_P \ (\subset T^*P)$$

を考える．$\bar{\ell}_0 \in \overline{L}_P$ を固定し，写像 $\alpha : \overline{L}_P \to S^1$ を

$$\bar{\ell} \mapsto \exp\left(i \int_{\bar{c}} p^*\omega\right) \quad (\bar{c} : \bar{\ell}_0 \text{ と } \bar{\ell} \text{ を結ぶ曲線})$$

と定義する．更に，$j : \overline{L}_P \times \mathbb{R}^+ \times S^1 \to (T^*P\backslash 0) \times (T^*\mathbb{T}^2\backslash 0)$ を

$$j(\bar{\ell}, \tau, z) = (\tau\ell, (\alpha(z^{-1}\bar{\ell}), -\tau), (z, -\tau))$$

と定義し，像

$$\Lambda := j(\overline{L}_P \times \mathbb{R}^+ \times S^1)$$

を考える．

補題 3.1. Λ は conic な Lagrange 部分多様体である．

Λ 上の適当な 1/2-density を選べば，Λ に対応して，Fourier 積分作用素

$$A \in I^{-\frac{1}{4}(n+1)}(P \times \mathbb{T}^2, \Lambda')$$

$(n = \dim M)$ が得られ，それが条件 (A-i)-(A-iii) を満たすことを確かめてゆく．特に，条件 (A-ii) を示すことが大きな部分を占める．具体的には, $A^*A : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ が $-1/2$ 次の Fourier 積分作用素で，部分空間 $L^2(\mathbb{T}^2; \{m_k\})$ への直交射影に等しいことを示すことである．□

例.

1．(S^2, can) 上の調和磁場 i.e., $\Theta = (\text{volume element})/2$.　この場合，対応する主 $U(1)$ 束は，よく知られているように，Hopf 束 $\pi : S^3 \to S^2$ であり，$\hat{H}_m$ $(m \in \mathbb{Z})$ のスペクトルは

$$\lambda_j^{(m)} = (j + \frac{|m|}{2})(j + \frac{|m|}{2} + 1) - \frac{m^2}{4} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

一方，(T^*S^2, Ω, H) は完全積分可能で，量子化条件を満たすエネルギー準位は

$$E_n = (n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

([6]). また，量子化条件を満たす各 Lagrange 多様体 L について，$m_L(\gamma)$ は偶数となり，$d=2$ であることが分かる．$j_k := (2n+1)k+n$ とおくと，$\forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ について，

$$\lambda_{j_k}^{(2k+1)} - (2k+1)^2 E_n = -1/4$$

が成り立つ．

2．<u>2次元平坦トーラス上の一様磁場．</u>　3次元 Heisenberg 群

$$H_1 := \left\{ (x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

において，離散部分群

$$\Gamma := \{(x,y,z) \in H_1;\ x,y,z \in \mathbb{Z}\}$$

による剰余空間 $P = \Gamma \backslash H_1$（べき零多様体）を考える．$P$ 上には，$S^1 = \{(0,0,z) \in H_1;\ 0 \le z < 1\}$ の（右から）作用し，この作用による剰余空間 P/S^1 は2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ であることが分かる．このようにして，主 $U(1)$ 束

$$\pi : P \to \mathbb{T}^2;\ [(x,y,z)] \mapsto [(x,y)]$$

が得られる．

H_1 の座標 (x,y,z) に関して，3つのベクトル場

$$e_1 := \partial/\partial x,\ \ e_2 := \partial/\partial y + x\partial/\partial z,\ \ e_3 := \partial/\partial z$$

は H_1 上の左不変ベクトル場である．H_1 の左不変計量を，e_1, e_2, e_3 が正規直交系となるように定義する．これより，P の計量 $\tilde{g}$ が誘導される．さらに，$\mathbb{T}^2$ において，$\pi_*(e_1) = \partial/\partial x$, $\pi_*(e_2) = \partial/\partial y$ が正規直交系であるように計量を定義すると，これは $\mathbb{T}^2$ の平坦計量であり，π は Riemannian submersion となる．

P の各点 p において，e_1, e_2 で生成される水平空間 $H_p(\subset T_pP)$ は P の接続 $\tilde{\nabla}$ を定義する．このとき，接続形式は，$\theta = 2\pi(dz - xdy)$，曲率は $\Theta = -2\pi dx \wedge dy$（一様磁場）である．

Schrödinger 作用素 $\hat{H}_m$ $(m \in \mathbb{Z})$ のスペクトルは

$$\lambda_j^{(m)} = 2\pi|m|(2j+1) \quad (j = 0,1,2,\dots)$$

で，$\lambda_j^{(m)}$ の重複度は $|m|$ である（[1]）．

古典力学系 $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega, H)$ の軌道はすべて周期的であり，また，完全積分可能であることも分かる．具体的に，Lagrange 多様体 $L(\subset T^*\mathbb{T}^2)$ として，

$$L_P(= (\Psi_{\mu_0}\pi_{\mu_0})^{-1}(L)) = \{[(x,y,z,\xi,\eta,2\pi)] \in T^*P;\ \widetilde{H} = E + (2\pi)^2, \eta = \eta_0(const.)\}$$

で与えられるものが存在する．L（または L_P）に対する量子化条件として，

$$E = 2\pi(2n+1)\ \ (n = 0,1,2,\dots), \quad \eta_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

が従う．$j_k := (2n+1)k+1$ とすれば，$\forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，

$$\lambda_{j_k}^{(2k+1)} = (2k+1)^2 E_n \quad (En := 2\pi(2n+1))$$

が成り立つ．

参考文献

[1] C. Gordon and E. Wilson, The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds, Michigan Math. J., **33**(1986), 253-271.

[2] R. Kuwabara, On Maslov's quantization condition for mechanics in a magnetic field, J. Math. Tokushima Univ., **33**(1999), to appear.

[3] V.P. Maslov, *Theorie des perturbations et methodes asymptotics*, Dunod, Guthier-Villars, Paris, 1972.

[4] F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Vol.2, Plenum Press, New York,1980.

[5] A. Weinstein, On Maslov's quantization condition, *Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations*, Springer Lect. Notes in Math. **459**(1974), 341-372.

[6] A. Yoshioka, The quasi-classical calculation of eigenvalues for the Bochner-Laplacian on a line bundle, in "*Geomery of Manifolds*" (1989), 39-56.